Definicija 0.1 *Kako svaka dva vektorska prostora nad istim poljem su izomorfna akko imaju iste dimenzije, to znači da je svaki vektorski prostor* $(V, F, +, \cdot)$ *dimenzije* n *izomorfan vektorskom prostoru* $(F^n, F, +, \cdot)$. *Izomorfizam prethodnih prostora je određen fiksiranjem neke proizvoljne baze* $(a_1, \ldots, a_n)$ *prostora* $(V, F, +, \cdot)$, *pa se zato obično označava sa* $\varphi_{(a_1,\ldots,a_n)} : F^n \to V$ *i definisan je sa*

$$\varphi_{(a_1,\ldots,a_n)}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

Izomorfizam $\varphi_{(a_1,\ldots,a_n)} : F^n \to V$ *se zove KANONIČKI izomorfizam.*

Definicija 0.2 *Neka je* $f : V_1 \to V_2$ *linearna transformacija vektorskog prostora* V_1 *u vektorski prostor* V_2 *oba nad istim poljem* F *i neka je* (a_1, a_2, a_3) *baza od* V_1, *a* (b_1, b_2) *baza od* V_2. *Ako je linearna transformacija* $f : V_1 \to V_2$ *data sa slikama svoje baze* (a_1, a_2, a_3):

$$\star \quad \begin{array}{rl} f(a_1) = & \alpha b_1 \;\; +\beta b_2 \\ f(a_2) = & \gamma b_1 \;\; +\delta b_2 \\ f(a_3) = & \phi b_1 \;\; +\psi b_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ f(a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

tada matricu $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \phi & \psi \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$ *zovemo matrica linearne transformacije* f *i po dogovoru koristimo i oznaku* $A = f$.

Prema tome linearna transformacija $f : V_1 \to V_2$ je definisana (data) ako su date baze (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2) i skalari matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$.
Jasno je da linearna transformacija f iz prethodne definicije jeste jednoznačno određena (data) sa slikama baze (a_1, a_2, a_3) (Vidi $\star$), jer za proizvoljni $x{=}\lambda_1 a_1{+}\lambda_2 a_2{+}\lambda_3 a_3$ iz V_1 važi da je

$$\begin{aligned} f(x) = f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) &= \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \lambda_3 f(a_3) = \\ &= \lambda_1(\alpha b_1 + \beta b_2) + \lambda_2(\gamma b_1 + \delta b_2) + \lambda_3(\phi b_1 + \psi b_2) \\ &(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \gamma + \lambda_3 \phi) b_1 + (\lambda_1 \beta + \lambda_2 \delta + \lambda_3 \psi) b_2 \end{aligned}$$

Znači dobili smo da je

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) = (\alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + \phi\lambda_3)b_1 + (\beta\lambda_1 + \delta\lambda_2 + \psi\lambda_3)b_2,$$

a ako uzmemo da su baze (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2) fiksirane, tada zbog kanoničkih izomorfizama, odgovarajućih njima, prethodna jednakost se može zapisati (vidi komentar u sledećem pasusu)

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + \phi\lambda_3, \beta\lambda_1 + \delta\lambda_2 + \psi\lambda_3) \quad \textit{ili}$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Strogo uzevši nismo smeli pisati $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, već je trebalo pisati $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \varphi_{(a_1,a_2,a_3)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, ali se to piše u smislu kraće oznake. To kraće označavanje ima logike samo zato što je $\varphi_{(a_1,a_2,a_3)}$ izomorfizam. Dalje ćemo govoriti da koordinate vektora $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ u bazi $B = (a_1, a_2, a_3)$ su $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ i pisati $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_B$, a ako se baza B podrazumeva pisaćemo samo $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Podsetimo se da smo to već radili kod slobodnih vektora i pisali $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = (x, y, z)$.
Evo još jedne ekvivalentne definicije matrice linearne transformacije.

Teorema 0.3 *Ako je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1 + \gamma x_2 + \phi x_3, \beta x_1 + \delta x_2 + \psi x_3) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

tada matrica te linearne transformacije f u odnosu na standardne baze je $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \phi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$. Često samu linearnu transformaciju f obeležavamo takođe sa simbolom A tj. $A = f$.

Dokaz Ako uzmemo redom $(x_1, x_2, x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ dobijamo $f(1,0,0) = (\alpha, \beta)$, $f(0,1,0) = (\gamma, \delta)$ i $f(1,0,0) = (\phi, \psi)$ tj.

$$\begin{array}{rll} f(1,0,0) = & \alpha(1,0) & +\beta(0,1) \\ f(0,1,0) = & \gamma(1,0) & +\delta(0,1) \\ f(0,0,1) = & \phi(1,0) & +\psi(0,1) \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(1,0,0) \\ f(0,1,0) \\ f(0,0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \phi & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1,0) \\ (0,1) \end{bmatrix}$$

Sada iz definicije 0.1 sledi tvrdnja teoreme.